Konspekt lekcji

(Kółko matematyczne, kółko przedsiębiorczości)

Łukasz Godzina

Temat: *Paradoks skąpej wdowy. O procencie składanym ogólnie.*

Czas lekcji 45 minut

Cele ogólne:

Uczeń:

- Umie obliczyć procent składany z liczby,
- Potrafi obliczyć trudniejsze granice związane z e.

Cele operacyjne:

Uczeń

- Umie w przybliżeniu podać wartość stałej Eulera,
- Oblicza złożone granice,
- Umie przekształcić funkcję wykładniczą na funkcję logarytmiczną,
- Stosuje poznane wzory w trudniejszych zadaniach,
- Doskonali umiejętności korzystania z kalkulatora matematycznego lub tablic matematycznych,
- Uświadamia sobie istotność czasu i oprocentowania dla funkcji oszczędzania.
- Poznaje dodatkowe wzory przydatne przy działaniach na logarytmach.

Zasady nauczania:

- Świadomego i aktywnego udziału ucznia w procesie nauczania i uczenia się,
- Przystępności,
- Wiązania teorii z praktyką,
- Systematyczności.

Metody pracy:

- Pogadanka dyskusja,
- Metoda poszukująca,
- Eksponująca interdyscyplinarność matematyki (oraz jej piękno).

Formy pracy

- Praca w zespole klasowym,
- Praca samodzielna.

Środki pracy

- Kartki z zadaniami,
- Rzutnik cyfrowy (ewentualna prezentacja rozwiązań z zał. 2.).

Wprowadzenie
N: Prosi o przypomnienie wzoru na procent składany, definicję logarytmu, granicy, oraz sam podaje przykłady obliczenia logarytmów i granic.
U: Przypominają wzór, definicję oraz podają przykłady.
N: Pogadanka na temat istotności oszczędzania, oraz sposobów na powiększenie efektywności oszczędzania.
U: Odpowiadają, dlaczego warto oszczędzać. I jakie są najpopularniejsze sposoby oszczędzania.

Część główna
N: Rozdaje kartki z zadaniami.
Zad 1. Paradoks skąpej wdowy.
U: Uczniowie starają się samodzielnie rozwiązać zaproponowane przez nauczyciela zadanie. O ile nie było wcześniej definicji funkcji e, należy pomóc uczniom w obliczeniu granicy.

N: Dyskutuje z uczniami istotę paradoksu.
U: Wyciągają wnioski dotyczące paradoksu. Np. Mimo posiadanych intuicji praktyka mocno rozminęła się oczekiwaniami.

N: Zad 2. Skąpa wdowa kontratakuje.
U: U już samodzielnie rozwiązują zadanie posiłkując się pomocą nauczyciela i rozwiązaniem zad 1.

N: Dyskusja sposobu myślenia wdowy.
U: Uczniowie wyciągają wnioski, np. intuicja, że procent w banku musi być jak największy jest poprawna.

N: Zad 3. Czyżby wdowa zmądrzała?
U: Samodzielnie rozwiązują zadanie posiłkując się wcześniejszym rozwiązaniem (jest to zadanie tylko pozornie trudniejsze niż poprzednie).

N: Dyskusja sposobu myślenia wdowy.
U: Uczniowie wyciągają wnioski, np. ilość lat ma znaczący wpływ na wysokość zgromadzonego kapitału.

N: Zad 4. Droga do miliona.
U: Samodzielnie rozwiązują zadanie.

N: Dyskusja sposobu myślenia wdowy oraz sposobem rozwiązania zadania. Po rozwiązaniu zadania podanie ciekawostki przez nauczyciela.
U: Uczniowie wyciągają wnioski, np. im wyższy procent tym większy kapitał będziemy uzyskamy, przy zbyt niskich odsetkach założony cel może stać się bardzo odległy.

N: Zad 5. Droga do miliona.
U: Samodzielnie rozwiązują zadanie.

N: Dyskusja sposobu myślenia wdowy oraz sposobem rozwiązania zadania.
U: Uczniowie wyciągają wnioski, np. jeżeli nie mamy możliwości regulacji odsetek, pozostaje nam regulacja ilości lat. Im więcej lat będzie działał nasz procent składany tym większy będzie nasz kapitał.

Podsumowanie lekcji.
N: Podsumowuje lekcję kładąc szczególny nacisk na nowo poznane wzory potrzebne do obliczania granic oraz zastosowanie matematyki do rozwiązywania problemów stricte ekonomicznych.
U: Aktywnie uczestniczą w pogadance.

Praca domowa
W drodze do domu zajść do banku i zapytać się o oprocentowanie na koncie oszczędnościowym. Czy przy nieskończenie częstej kapitalizacji uda się z 1500 zł w krócej niż 25 lat uzyskać 750 tys. zł? Porównaj kilka banków. Sprawdź, jakie oprocentowanie było by wystarczające.

Udowodnij tożsamość z ciekawostki 1 (wskazówka: skorzystaj ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu)

Załącznik 1 (Karta z zadaniami)

Zad 1 (Paradoks skąpej wdowy)
Żyła sobie kiedyś pewna bardzo skąpa wdowa z kapitałem początkowym A. Wiedziała ona, że pieniędzy w skarpecie nie przybędzie, więc postanowiła, że odda swoje oszczędności do banku. Ale to nie mógł być zwykły bank! Nie dla chytrej wdowy, która tak dobrze zna matematykę. Wdowa pomyślała: skoro znam wzór na procent składany i zależy on tylko od oprocentowania, ilości lat oraz ilości kapitalizacji oddam do takiego banku, gdzie te zmienne są jak największe (oprócz ilości lat – musi wystarczyć 1 rok). Chodziła, więc od banku do banku szukając odpowiedniego miejsca. Znalazła bank, w którym oprocentowanie wynosi 100%. Teraz pozostała kwestia wynegocjowania częstotliwości kapitalizacji w ciągu jednego roku. Wdowa wynegocjowała najpierw kapitalizację co pół roku. Następnie co kwartał, dalej, co miesiąc, tydzień, dzień, godzinę, minutę. Ostatecznie jej kapitał kapitalizować się będzie tak często jak często kasjer może wciskać enter. Wdowa wykrzyknęła: TERAZ BĘDĘ BOGATA!! Czy wdowa rzeczywiście dobrze znała się na matematyce?

Zad 2 (Skąpa wdowa kontratakuje)
Wdowa pomyślała sobie tak: skoro bank mnie oszukał to poszukam takiego, w którym jest troszkę mniejszy procent i kapitalizacja nieskończenie częsta w ciągu roku. No i znalazła taki bank, w którym procent wynosił 80% wraz z odpowiadającą jej kapitalizacją. Oddała w ręce bankierów swój kapitał, B i pozostało jej tylko czekać. No ciekawe czy znowu uda im się mnie oszukać!! – wykrzyknęła na koniec.

Zad 3. (Czyżby wdowa zmądrzała?)
Oszukali mnie!! Jak mogli?? Teraz zostawię mój kapitał C na kilka lat. Niech będzie na 3 lata w tym samym banku i na takich samych warunkach. Co powiecie teraz?! Czy wdowa zmądrzała?

Zad 4. (Droga do miliona)
Wdowa zadowolona wykrzyknęła – już odkryłam potęgę procentu składanego!! Ciekawe na ile lat muszę zostawić 1 tys. zł, aby przy tych samych warunkach uzyskać milion złotych? Po ilu latach wdowa miałaby milion gdyby odsetki były bardziej realne tzn. np. 6%?

Zad 5 (Droga do miliona)
Przy jakich odsetkach wdowa z 1 tys. zł uzyska milion złotych w ciągu 25 lat?

Załącznik 2 (rozwiązania)

Rozwiązanie 1
Z warunków zadania mamy:

Kapitał końcowy $A_{końonco} = A \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gdzie n jest ilością kapitalizacji w ciągu roku, a licznik ułamka jest oprocentowaniem (100% = 1). Możemy przyjąć, że liczba okresów kapitalizacji dąży do nieskończoności (w końcu nasza wdowa długo szukała odpowiedniego banku). Zapiszmy, więc po raz kolejny nasz wzór, tym razem używając ciągu. Skorzystajmy również z własności granicy i obliczymy wartość ciągu.

$$A_{końonco} = \lim_{n\to\infty} A\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = A \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = A \cdot e.$$

Dla przypomnienia: podany ciąg zbiega do e. Stałej Eulera będącej częściej spotykaną, jaka podstawa logarytmu naturalnego. W przybliżeniu e wynosi 2, 7182818284. Więc nasza wdowa pomnożyła swój kapitał mniej niż trzykrotnie. Czy na pewno tego się spodziewaliście?

Odp. Wdowa nie znała się na matematyce tak dobrze jak sądziła. Uzyskała stopę zwrotu ok. 272% kapitału początkowego.

Rozwiązanie 2
Kapitał początkowy B
Odsetki r = 80% = 0,8

Kapitał końcowy $B_{końonco} = B\left(1 + \frac{0,8}{n}\right)^n$ gdzie n jest ilością kapitalizacji w ciągu roku. Znowu możemy przyjąć, że liczba okresów kapitalizacji dąży do nieskończoności. Zapiszmy nasz wzór i obliczmy wartość kapitału końcowego.

$$B_{końonco} = \lim_{n\to\infty} B\left(1 + \frac{0,8}{n}\right)^n = B \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{0,8}{n}\right)^n = B \cdot e^{0,8} \approx 2,225540928 \cdot B$$

Gdy pod znakiem ciągu zmienna (w tym przypadku 0,8) znajduje się w liczniku, w granicy znajdzie się w wykładniku potęgi o podstawie e. A więc ogólnie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Odp. Wdowa po raz kolejny nie spełniła swoich marzeń odnośnie kapitału. Stopa zwrotu 226% kapitału początkowego jest mniejsza niż w zadaniu 1.

Rozwiązanie 3
Kapitał początkowy C
Odsetki r = 80% = 0,8
Ilość lat m = 3

Analogicznie, jednak korzystając już z pełnego wzoru na procent składany:

$$C_{końćowo} = C\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n\cdot 3} = C\left(\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{3}$$

Przyjmując, że liczba okresów kapitalizacji dąży do nieskończoności otrzymujemy:

$$C_{końćowo} = \lim_{n\to\infty} C\left(\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{3} = C\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{3} = C\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{3} = C\cdot\left(e^{0,8}\right)^{3} =$$

$$= C\cdot e^{3\cdot 0,8} = C\cdot e^{2,4} \approx 4,211144101\cdot C$$

Gdy dodatkowo nasz ciąg mamy podniesiony do jakiejś potęgi (w tym przypadku o wykładniku 3) w wyniku otrzymujemy e podniesione do tej potęgi. A więc ogólnie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot m} = e^{r\cdot m}$$

Odp. Wdowa wykazała więcej rozsądku zostawiając kapitał na dłuższy czas. 421% Związane jest bezpośrednio z okresem 3 lat poświęconych na czekanie.

Rozwiązanie 4

Kapitał początkowy 1 tys. zł =1 000 zł $=10^3$

Odsetki r = 80% = 0,8

Ilość lat m = 3

$$10^6 = \lim_{n\to\infty} 10^3\left(\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{m} = 10^3\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{m} = 10^3\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,8}{n}\right)^{n}\right)^{m} = 10^3\cdot\left(e^{0,8}\right)^{m}$$

$$e^{0,8m} = \frac{10^6}{10^3}$$

$$e^{0,8m} = 10^3$$

$$\ln 10^3 = 0,8m$$

$$3\ln 10 = 0,8m$$

$$\frac{3\ln 10}{0,8} = m$$

$$m \approx \frac{6,907755279}{0,8}$$

$$m \approx 8,634694099$$

Odp. Wdowa przy tak dużych odsetkach już po 8 latach

Przypadek dla odsetek r = 6% = 0,06. Tok myślenia analogiczny do pokazanego wyżej.

$$m = \frac{3\ln 10}{0,06}$$

$$m \approx \frac{6,907755279}{0,06}$$

$$m \approx 115,1292547$$

Odp. Już po 116 latach (!!) od założenia takiej lokaty będzie można mówić o niej: „Prawdziwa milionerka”

Ciekawostka 1
Zachodzi tożsamość:

$$\log e \cdot \ln 10 = 1$$

Lub ogólniej

$$\log_a x \cdot \log_x a = 1$$

Ciekawostka 2
Zachodzi tożsamość:

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$$

Rozwiązanie 5
Kapitał początkowy 1 tys. zł =1 000 zł $=10^3$
Odsetki r
Ilość lat m = 25

Analogiczne rozumowanie doprowadza do równania:

$e^{30r} = 10^3$

$\ln 10^3 = 30r$

$\frac{3\ln 10}{30} = r$

$m \approx \frac{6,907755279}{30}$

$m \approx 0,230258509$

Odp. Oprocentowanie ok. 23 % pozwoli w ciągu 30 lat uzbierać wdowie milion.

Bibliografia:

Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Mizerskiego, Tablice matematyczne, Wydawnictwo Adamant, Warszawa 2002

G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy całkowy, PWN, Warszawa 1999

G. Gabor, Wykład Analiza matematyczna 1 dla kierunku Nauczanie matematyki i fizyki, UMK, Toruń 2005